

解 説

オプション市場からみた原資産価格の予測可能性

モルガンスタンレー証券会社
株式調査部 神山直樹
一橋大学大学院博士後期課程
青木岳人

1) はじめに:

本研究では、複数の行使価格にまたがるオプションの市場価格が内包する将来の原資産価格分布を推定し、同推定分布のパラメータ情報を用いることで原資産の将来価格が予測可能であることを示す。

資産価格の予測可能性というテーマに関し、Samuelson [1965]は、アービトラージャーが利潤を得るための裁定取引を行うため、資産価格は予測可能性を即座に失いランダムに変動することを示した。また、市場が効率的ならば資産に関する全ての公開された情報が瞬時に価格に反映され、市場参加者が合理的に投資行動の決定を行うことで裁定機会は消滅し、資産価格がランダムに変動することも示している。さらに、Fama [1970]も、資産価格の不確実性が市場参加者の利益追求による競争の結果であり、市場が効率的に機能している証拠であると効率的市場仮説を主張した。

資産価格の予測可能性に関する実証研究、特に価格変動のランダムウォーク性に関する実証研究はLo and Mackinlay [1989, 1991]など数多く存在するが、オプション市場の情報を用いた原資産価格の予測可能性に関する研究はほとんど見当たらない。既存の研究の多くは、日米欧の株式市場では、日次や週次など短期間で見た場合には資産価格収益率はラグ1の時系列相関が有意に存在し資産価格はある程度予測可能であるが、月次以上になると予測可能性が統計的に存在しないとの結論を出している。本研究では、オプション市場の情報を用いた場合に、原資産市場の過去情報を用いるよりも原資産の将来価格をより高い精度で予測可能であることを示す。

オプション市場参加者は入手可能な原資産価格に関する情報をもとに将来の収益率を予測して取引していると考えられるため、オプション価格は市場参加者の予測を内包していると考えられる。

具体的には、オプション価格は異なる行使価格毎に価格付けされるため、将来の原資産価格のリターンに関する尖度や歪度の情報を内包している。そのため、複数の行使価格にまたがるオプション価格は将来のボラティリティのみではなくリターンについての情報も内包している。しかし、多くの市場参加者はこの点に気付いていない(ボラティリティスマイルなどの存在に気づいていないにすぎない)ため、予測可能性が保持されているとみなすことができる。本研究で示すオプション市場の価格情報を利用すれば、日本株式市場においてはFama [1970]が提唱するウィークフォームな効率的市場仮説が1週間から1ヶ月程度の期間について成立していないことを示すことができる。

実務者によく利用されているブラックショールズモデル(以下「BSモデル」と言う)は原資産価格の変動過程に対数正規分布を仮定したモデルであり、原資産の現在価格、無リスク利率、標準偏差、行使価格及び満期が決定されれば理論価格が解析的に計算可能である。しか

し、現実には現資産価格が対数正規分布に従っていないことは数多くの既存研究にて実証されている。オプション市場の行使価格別価格付けがより現実に起こりうる株価リターン分布を反映する結果、BSモデルで分析した市場においてボラティリティスマイルやスマーク等が生じると考えられる。Rubinstein [1995]は、無裁定価格理論より特定の分布を仮定せずにオプション価格から原資産価格の離散分布を推定するノンパラメトリックな推定方法を示しており、エキゾチックオプションのプライシングなどに広く利用されている。

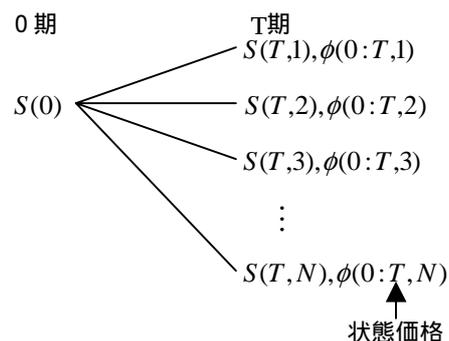
本研究では、Rubinsteinアプローチを適用し、パーティカル・ベア・スプレッド及びバタフライ・スプレッドの組み合わせにより各行使価格間及び行使価格の範囲以外の状態に原資産価格が推移するリスク中立確率を計算し、満期時点での原資産価格が従う離散分布及びパラメータを推定する方法を示す。また、実際に日経平均オプションの価格データを用い、Rubinsteinアプローチによる推定分布の方がBSモデルによる推定分布よりも日経平均の将来変動に関しより多くの情報を内包していること、及びRubinsteinアプローチによる推定分布にて日経平均を予測可能であることを実証分析により示す。

実証結果からは、オプション価格から満期時点の日経平均の価格分布を推定する場合、Rubinsteinアプローチを適用したノンパラメトリック推定の方が、対数正規分布を仮定するBSモデルより日経平均の収益率に関して、より多くの情報を持っていることが確認できた。更に、Rubinsteinアプローチによる推定分布のパラメータを用いた場合には、将来(満期時点)の日経平均の収益率に対し約40%の説明力があることを示すことができた。また、オプション市場から推定したパラメータの方が、推定日までの過去の日経平均自身の収益率よりも、日経平均の将来の収益率に関し説明力が大きいことを確認した。因みに、過去の日経平均自身の将来収益率の説明力は約10%であった。

同結果は、オプション価格が株式市場に先行して日経平均の将来の収益率の情報を正確に反映させていることを示している。つまり、複数の行使価格にわたるオプション価格には市場参加者の日経平均の変動予測が反映されており、尖度や歪度といった分布に関する情報は収益率を有意に説明し説明力も高い。しかし、Rubinstein型の分析が実務的には一般化しておらず、このことがまだ知られていない可能性が考えられ、オプション市場から見た場合には日本の株式市場が非効率的市場である可能性がある。

2) Rubinsteinアプローチによるパーティカル・スプレッド及びバタフライ・スプレッドを利用した同値マルチンゲール測度での原資産価格分布の推定方法:

まず、取引コストや流動性リスクが存在しない完備な無裁定市場を仮定する。裁定取引が存在しない完備市場の必要十分条件より、状態価格は一意に存在する。ここで、 n 期の状態 k を状態 (n, k) とした場合、 $S(n, k)$ を状態 (n, k) の原資産価格、 $\phi(t, l; n, k)$ を状態 (t, l) から状態 (n, k) への状態価格、 $\phi(t, l; n, k)$ を状態 (t, l) から状態 (n, k) へのリスク中立確率、 r_f を1期間のリスクフリーレート及び $B(t, n)$ を満期 n 期とする t 期の割引債価格とすると、原資産価格の0期から T 期までの価格ツリーは以下の通りとなる。



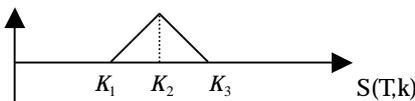
0期からT期の各状態への状態価格にて、割引債及びリスク中立確率は以下の通り定式化出来る。

$$B(0,T) = \frac{1}{(1+r_f)^T} = \sum_{k=1}^N \phi(0:T,k) \dots\dots\dots(1)$$

$$\hat{\phi}(0:T,k) = \phi(0:T,k) / B(0,T), \{k=1, \dots, N\} \dots\dots\dots(2)$$

次に、オプション価格から組成したパーティカル・スプレッド及びバタフライ・スプレッドを利用した状態0からT期の各状態への状態価格の推定方法を説明する。0期からT期の各状態への状態価格とは、各状態で確実に1を獲得する為に0期に支払うべき価格である為、T期の各状態で確実に獲得可能なペイオフをオプションの組み合わせで構築することで近似的に計算可能となる。状態価格の計算方法は以下の通りである。原資産のスポット価格がS(0)、行使価格がK及び満期がT期のコールオプション及びプットオプションの価格をC(S(0),K,T),P(S(0),K,T)とすると、行使価格K1及びK3のコールオプションC(S(0),K1,T),C(S(0),K3,T)を1単位づつロングし、行使価格K2のコールオプションC(S(0),K2,T)を2単位ショートするとT期にて以下の通りバタフライ・スプレッド(BF)のペイオフを構築可能である。これは、原資産がT期でK1及びK3の範囲(同範囲の各状態(T,k)のkをk=K1,...,K3と表現し、以下同様にk=満期T期での原資産価格として表す)に推移した場合に確実に獲得できるペイオフ(CF(S(T,k)))である為、そのコストCost_{BF}(K2)は、CF(S(T,k))を満期T期時点の各状態に対するペイオフとした場合に状態価格を用いて以下の通り定式化される。

ペイオフ

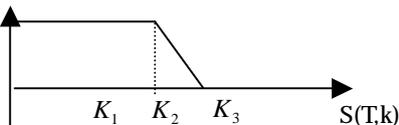


$$Cost_{BF}(K_2) = C(S(0), K_1, T) - 2C(S(0), K_2, T) + C(S(0), K_3, T) = \sum_{k=K_1}^{K_3} CF(S(T,k))\phi(0:T,k) \dots\dots\dots(3)$$

$$D = K_2 - K_1 = K_3 - K_2 \dots\dots\dots(4)$$

但し、同式からだけでは各状態の状態価格も各行使価格の範囲内に推移する場合の状態価格の総和も一意に定まらない(状態価格の総和が求まればその範囲に推移するリスク中立確率を推定できるし、CF(S(T,k))が一定であれば状態価格の総和は計算可能となる)。また、行使価格が上限と下限を超える範囲の状態価格を計算することも出来ない為、オプションの行使確率も原資産価格の分布も正確に推定することは難しい。ここで以下のパーティカル・ベア・プット・スプレッド(VPS)のペイオフを考える。同ペイオフを得る為の0時点のコストCost_{VPS}(K2)は状態価格を用いて以下の通り定式化できる。

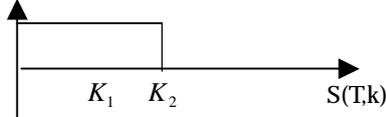
ペイオフ



$$Cost_{VPS}(K_2) = P(S(0), K_3, T) - P(S(0), K_2, T) = \sum_{k=0}^{K_2} D\phi(0:T,k) + \sum_{k=K_2}^{K_3} CF(S(T,k))\phi(0:T,k) \dots\dots\dots(5)$$

ここで、S(T,k)が行使価格K2以下に推移するリスク中立確率を計算する為に以下のペイオフを考える。

ペイオフ



このペイオフのコストは(5)式より以下にて表現できる。

$$Cost_{VPS}(K_2) - \sum_{k=K_2}^{K_3} CF(S(T,k))\phi(0:T,k) = P(S(0), K_3, T) - P(S(0), K_2, T) - \sum_{k=K_2}^{K_3} CF(S(T,k))\phi(0:T,k) = \sum_{k=0}^{K_2} D\phi(0:T,k) \dots\dots\dots(6)$$

つまり、S(T,k)が行使価格K2以下に推移する全ての状態の状態価格の総和は以下の通り定式化できる。

$$\sum_{k=0}^{K_2} \phi(0:T,k) = \{Cost_{VPS}(K_2) - \sum_{k=K_2}^{K_3} CF(S(T,k))\phi(0:T,k)\} / D \dots\dots\dots(7)$$

また、(2)式よりS(T,k)が行使価格K2以下に推移するリスク中立確率は同状態の状態価格の総和を割引債価格で割ったものと一致することより、以下が成立する。

$$\sum_{k=0}^{K_2} \hat{\phi}(0:T,k) = \sum_{k=0}^{K_2} \phi(0:T,k) / B(0,T) \dots\dots\dots(8)$$

ここで、 $\sum_{k=K_2}^{K_3} CF(S(T,k))\phi(0:T,k)$ は近似的にしかオプション価格から計算できない為、以下の式で近似する。

$$\sum_{k=K_2}^{K_3} CF(S(T,k))\phi(0:T,k) \approx Cost_{BF}(K_2) / 2 \dots\dots\dots(9)$$

本推定において推定誤差が生じる部分は、割引債価格の推定誤差を除けば(9)式の近似式から生じる誤差のみと考えられる。同様に、一般形で表現すると、S(T,k)が行使価格Kn以下に推移するリスク中立確率は以下にて表現できる。

$$\sum_{k=0}^{K_n} \hat{\phi}(0:T,k) \approx \sum_{k=0}^{K_n} \phi(0:T,k) / B(0,T), \sum_{k=0}^{K_n} \phi(0:T,k) \approx \{Cost_{VPS}(K_n) - Cost_{BF}(K_n) / 2\} / D \dots\dots\dots(10)$$

ここで、行使価格の下限K1に対する(10)式の近似式には以下の式を適用する。

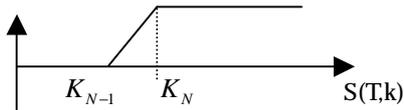
$$\sum_{k=0}^{K_1} \phi(0:T,k) \approx \{Cost_{VPS}(K_1) - Cost_{BF}(K_2) / 2\} / D \dots\dots\dots(11)$$

また、S(T,k)が行使価格KnからKn-1に推移するリスク中立確率は、Kn以下に推移する確率からKn-1以下に推移する確率を引いたものと一致する。すなわち、

$$\sum_{k=0}^{K_n} \hat{\phi}(0:T,k) - \sum_{k=0}^{K_{n-1}} \hat{\phi}(0:T,k) \dots\dots\dots(12)$$

となる。最後に、S(T,k)が行使価格の上限KN以上に推移するリスク中立確率を推定する為、以下パーティカル・ベア・コール・スプレッドのペイオフを考える。

ペイオフ



同ペイオフを得る為の0時点のコスト $Cost_{VCS}(K_N)$ は状態価格を用いて次の通り定式化できる。

$$Cost_{VCS}(K_N) = C(S(0), K_{N-1}, T) - C(S(0), K_N, T)$$

$$= \sum_{k=K_{N-1}}^{\infty} D\phi(0:T, k) + \sum_{k=K_{N-1}}^{K_N} CF(S(T, k))\phi(0:T, k) \dots (13)$$

ここで、(9)式と同様の近似式としては以下を適用する。

$$\sum_{k=K_{N-1}}^{K_N} CF(S(T, k))\phi(0:T, k) \approx Cost_{BF}(K_{N-1})/2 \dots (14)$$

上記より、 $S(T, k)$ が行使価格 K_N 以上に推移するリスク中立確率は近似的に以下にて表現できる。

$$\sum_{k=K_N}^{\infty} \hat{\phi}(0:T, k) = \frac{\{Cost_{VCS}(K_N) - Cost_{BF}(K_{N-1})/2\} / D}{B(0, T)} \dots (15)$$

これより、 $S(T, k)$ が K_{N-1} から K_N の範囲に推移する確率は1から K_{N-1} 以下に推移する確率と K_N 以上に推移する確率をひいたものと一致する。つまり、各行使価格間の範囲内外に推移するリスク中立確率が推定できる。これより、原資産価格の満期時点における離散分布が推定可能となり、各オプションの行使確率をノンパラメトリックな推定方法により近似的に計算できる。

次に、推定分布の各パラメータを近似的に計算する。ここで、Rubinstein[1995]と同様に行使価格間のリスク中立確率が一定との仮定を置く。同仮定より、各行使価格間のリスク中立確率のもとの平均値は行使価格間の中点 $(K_2 + K_3)/2$ となる。また、状態の上限及び下限を設定し、それぞれ上限の行使価格を $K_N + D$ 、下限の行使価格を $K_1 - D$ と仮定することで推定分布の分散、歪度及び尖度を近似的に計算することができる (Rubinstein [1995]では上限を K_n と仮定)。

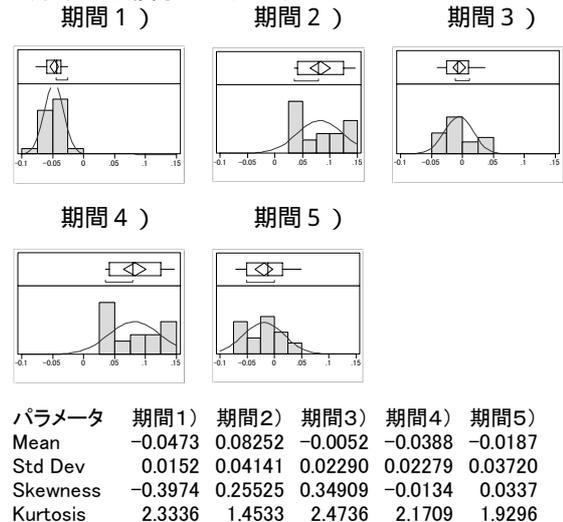
次項では、BSモデルによる推定パラメータとRubinsteinアプローチによる推定パラメータとの比較を行い、Rubinsteinアプローチによる推定パラメータの方が将来の原資産収益率に対しより多くの情報を内包しているかどうか、及び同推定パラメータにより原資産価格が予測可能かどうかを日経平均オプションの価格データを用い実証分析する。

3) 実証結果：

日経平均オプション価格のヒストリカルデータを用い、BSモデルによる推定分布及びパラメータとRubinsteinアプローチによる推定分布及びパラメータとを比較し、日経平均の将来変動を説明する各パラメータの回帰係数の有意性を検証する。また、Rubinsteinアプローチによる推定パラメータを用いた方が、過去の価格変動を用いるよりも予測力が高いどうかを分析する。使用データには、大阪証券取引所の2003年7月2日～11月28日の日経平均オプション期近物 (但しSQ月に入ると翌月物) の終値、日経Fameの日経平均の終値及び無リスク利率としてはヘッジ目的の点から流動性の高い (先物取引がある) 10年物国債利回りを適用した。また、オプション価格は流動性の点から清算月月初から当月の清算日までのデータは使わないようにした。つまり、1) 7月2日～7月31日は8月満期、2) 8月1日～8月31日は9月満期、3) 9月1日～9月30日は10月満期、4) 10月1日～10月31日は11月満期及び5) 11月1日～11月28日は12月満期のオプション価格データを用いて日経平均の満期時点の価格分布を推定し各パラメータ (日次ベース) を計算した。計算に用いたオプションの行使価格の選択方法は、取引が成立し価格付けされたオプションの行使価格のみを選択した。また、毎日のスポット価格に最も近い行使価格をアットザマネーと定義した。

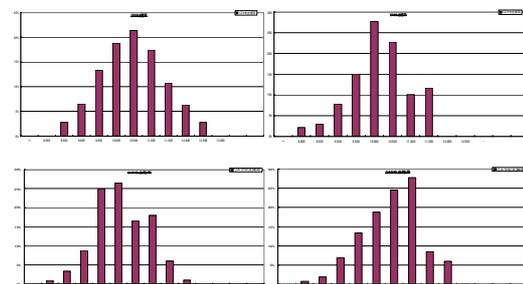
先ず、上記1)～5)までの各期間での各推定日から満期までの日次収益率のヒストグラムを示すと図1の通りとなる。ヒストグラムの形状及び歪度と尖度からは、各期間によって分布の形状が明らかに違うと言える。また、正規性が保たれているとは考えづらく、正規分布を仮定しているBSモデルではこれらの分布の形状を反映できないと考えられる。大数の法則で考えれば分布は正規分布に近くなる可能性があるが、サンプル数の少ない短期間でみた場合には分布は歪んでいることが明確であるため、オプション等の短期間投資の場合には市場参加者が入手可能な情報をもとに短期的歪みを予測して取引を行っていると考えられる。

図1：推定日から満期までの収益率 (日次ベース) のヒストグラム及びパラメータ



次に、Rubinsteinアプローチによる推定分布の例を図2に示す (全サンプル毎に分布を推定している為、推定分布はサンプル数があるが本項ではその一例を示す)。推定分布は必ずしも正規性を保っておらず、推定時期により形状も異なる可能性があることが解る。BSモデルではインプライドボラティリティ (以下「IV」と言う) のみの変化により分布形状の変化を表現しており、歪度及び尖度は一定である。一方、Rubinsteinアプローチでは歪度及び尖度の変化も推定可能である。この推定歪度及び尖度がBSモデルに対し将来リターンの追加的な情報を内包している可能性がある為、回帰分析により検証する。

図2：ノンパラメトリック推定分布の一例



先ず予備的に、IV、歪度及び尖度と実現した収益率との相関を検証する。BSモデルのIVには市場で最も頻繁に価格形成が行われる可能性の高い (流動性の高い) アットザマネーの行使価格を適用した。仮に、オプション市場参加者が原資産価格の推定日から満期までの収益率が高くなると予測している場合には、原資産価格の推定分布の裾は正の方向に長くなる (歪度が大きくなる) と考えられる。つまり、オプション市場参加者の予測が正しいとすれば、原資産価格収益率の実現値と推定歪度とは正の相関があることを予想できる。推定日から満期までの日経平均の収益率 (日次ベース) と推定歪度との相関

は、Rubinsteinアプローチの推定歪度と収益率とでは0.3弱の正の相関があり、予想通りの結果になった。また、推定尖度と収益率との間にも0.3弱の正の相関が存在していることより、日経平均の上昇局面では分布が正の方向に裾が長くなり且つテールが薄くなるが、下落局面では負の方向に裾が長くなり且つファットテールになる傾向があると言える。因みに、BSモデルでは歪度が0で尖度が3と一定値である為、相関はゼロである。収益率とIVとの相関では、BSモデルもRubinsteinアプローチも-0.2強と負の相関があり、日経平均の上昇局面では市場参加者の予測水準が比較的一致するが、逆に下落局面では予測水準のズレが大きくなる傾向がある。

次に、各推定パラメータを用いた場合に日経平均の将来変動をどの程度説明できるのかを回帰分析により分析する。回帰分析結果は図3の通りである。まず、IVによる回帰分析結果より、BSモデルとRubinsteinアプローチのIVの回帰係数は両方とも5%水準で有意となっている。また、決定係数もそれぞれ5~6%と同程度の説明力があるが、説明力はそれ程大きくは無いと言える。次に、歪度及び尖度に関しては、当然BSモデルの説明力はゼロであるが、Rubinsteinアプローチの歪度及び尖度の回帰係数は5%水準で両方とも有意である。また、決定係数もそれぞれ8~9%とそれ程大きな説明力はないがボラティリティよりは説明力が大きいと言える。つまり、推定した各パラメータが推定日から将来のオプション満期時点の日経平均に関する何らかの情報を内包していること及び推定した歪度及び尖度の方がIVよりも多くの情報を持っていると言える。

図3：推定日から満期までの収益率（日次ベース）を説明する単回帰分析結果

変数	定数項	t値	回帰係数	t値	決定係数
BS Implied Volatility	0.00371	2.06	-0.219	-2.23	0.048
Rubinstein Implied Volatility	0.00514	2.31	-0.323	-2.45	0.057
Rubinstein Implied Skew	0.00096	1.99	0.00227	2.92	0.079
Rubinstein Implied Kurt	-0.00868	-3.19	0.00291	3.1	0.088

更に、RubinsteinアプローチのIV、歪度及び尖度の全てを用いた場合には、推定日から満期までの収益率（日次ベース）に対してどの程度の説明力を持っているのかを検証する為に多重回帰分析を行った。分析結果は図4の通りであり、全ての回帰係数が5%水準で有意となっている。また、修正決定係数は40%と高い説明力がある。BSモデルでは歪度及び尖度が一定である為、結局IVのみの説明力が将来の日経平均の価格分布に対する説明力となるので、明らかにRubinsteinアプローチの説明力の方がBSモデルに比較して相当大きな説明力を持っていると言える。

図4：推定日から満期までの収益率（日次ベース）を、IV、歪度及び尖度で説明する多重回帰分析（決定係数は修正決定係数）

変数	回帰係数	t値
定数項	-0.008	-2.6
Rubinstein Implied Volatility	-0.35	-3.27
Rubinstein Implied Skew	0.0049	6.66
Rubinstein Implied Kurt	0.0056	6.35
決定係数		0.404

最後に、日経平均の過去の価格情報を用いた場合よりも上記結果の方が日経平均の将来の収益率に対し説明力が高いことを示す。つまり、「推定日から満期までと同じ日数分過去」から推定日までの日経平均の収益率（日次ベース）により、推定日から満期までの将来の収益率（日次ベース）を回帰分析した（既存の研究通りラグ1の自己回帰と同じ意味）。分析結果は図5の通りであり、回帰係数は5%水準で有意となっている。また、決定係数も7%とIVよりは大きな説明力があるが、推定歪度及び尖度とはほとんど同じ程度の説明力であると言える。しかし、オプション市場から推定したパラメータ全て（IV、歪度及び尖度）での回帰分析結果と比べると明らかに説明力が小さいことが確認できた。

図5：推定日から満期までの収益率（日次ベース）を、推定日から満期までと同じ日数分過去から推定日までの収益率（日次ベース）で説明する回帰分析

変数	回帰係数	t値
定数項	-0.0016	-1.95
満期までと同じ日数分過去からのReturn(日次ベース)	0.236	2.79
決定係数		0.0722

4) 結論：

日本の株式市場は、短期ならば過去リターンが将来を予測する力があるということからウィークフォームの非効率性があることが再確認された。しかし、それを大きく上まわる情報を日経平均のオプション価格が内包していることが示された。複数の行使価格にまたがる価格が内包する歪度や尖度を利用することで、将来の収益率を40%程度の決定力で説明できたからである。日経平均オプションの市場参加者はBSモデルを多く使っておりスミルなどの存在を認識しているが、その情報が持つ予測力を利用するに至っていない。このため、オプション市場の先行性は消滅しない。

今回の分析結果は、サンプル数が少ないとの問題は残るが、日本の株式市場がオプション市場の情報を内包している場合には、ウィークフォームな効率的市場仮説が既存研究より強く棄却されることを示唆している。但し、本研究の結論をより厳密に実証する為には、同様の分析をより長いサンプル期間にて米国及び欧州などの他市場でも行う必要があると考えられる。それらの分析は今後の課題とする。

参考文献：

Black, and Scholes, 1975, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Financial Analysts Journal, 31

Cambell, Lo, and Mackinlay, 1997, The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press, Princeton, New Jersey

Cox, and Ross, 1976, The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, Journal of Financial Economics, 3, 145-66

Cox, and Ross, and M. Rubinstein, 1979, Option Pricing: A simplified Approach, Journal of Financial Economics, 7, 229-264

Derman, Emanuel, and Kani, 1994, Riding on the smile, RISK, 7, 32-39

Duffie, D., 1992, Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton University Press, Princeton, New Jersey

E. .F Fama, 1970, Efficient Capital Markets, Journal of Finance 25

Gemill and Saflekos, 2000, How Useful are Implied Distributions?, Journal of Derivatives

Hull, J., 1993, Options, Futures, and Other Derivative Securities (2nd ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey

Pan and Poteshman, 2003, The Information in Option Volume for Stock Prices, Discussion Paper

Longstaff, Francis, 1990, Martingale restriction testes of option pricing models, version 1, Working paper, University of California, Los Angeles.

Rubinstein, M., 1994, Implied Binomial Trees, The Journal of Finance, 49, 771-818